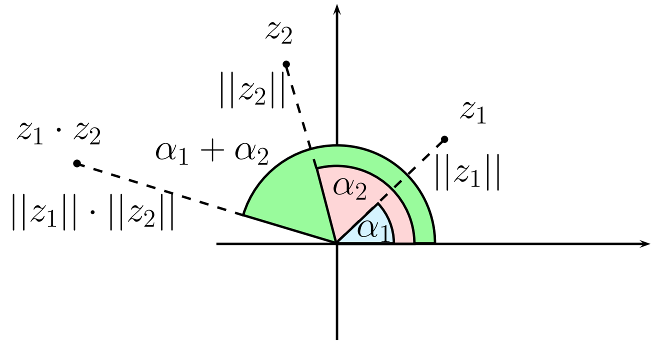
Komplexní čísla 4:
Geometrický pohled na $\mathbb{C}$, historie vzniku $\mathbb{C}$ & opakování

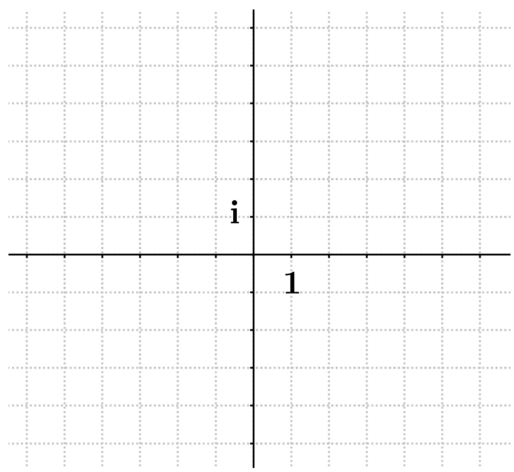
Komplexní čísla jako posunutí a otočení Z minula si připomeňme, že díky Moivreově větě můžeme geometricky interpretovat násobení dvou komplexních čísel:



Pojďme tuto s touto ideou pracovat:

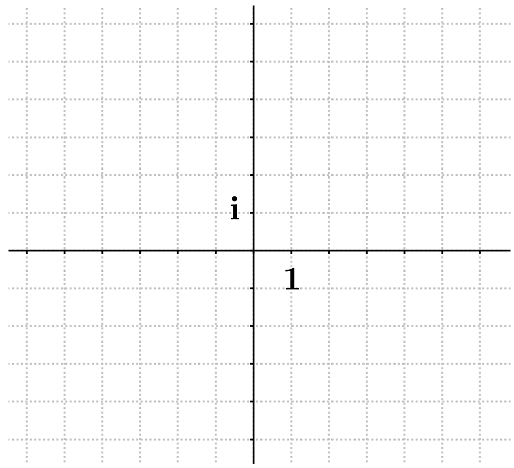
1. Představme si zobrazení

$$f(z) = z + (1 + 2i).$$



Nakreslete do obrázku nahoře dvojice čísel z_i a $f(z_i)$:

- $z_1 = 2 + i$
- $z_2 = -5 + 3i$
- $z_3 = 3$
- $z_4 = -4 - 3i$
- $z_5 = 3 - i$
- $z_6 = 0$
- $z_7 = 2i$
- $z_8 = -i$
- $\pi + e \cdot i$

2. Představme si nyní zobrazení
$$g(z) = z \cdot i.$$


Nakreslete do obrázku nahoře vždy dvojice čísel z_i a $g(z_i)$:

- $z_1 = 2 + i$
- $z_2 = -5 + 3i$
- $z_3 = 3$
- $z_4 = -4 - 3i$
- $z_5 = 3 - i$
- $z_6 = 0$
- $z_7 = 2i$
- $z_8 = -i$
- $\pi + e \cdot i$

3. Co dělá s čísly (= body v Gaussově rovině) zobrazení f? Co by s nimi dělalo zobrazení $f_2(z) = z - (3 - 2i)$?
4. Co dělá s čísly zobrazení g? Co by s nimi dělalo zobrazení $g_2(z) = z \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)$?
5. Co by dělalo s čísly zobrazení $c(z) = \overline{z}$? Jak by vypadalo zobrazení, které by se chovalo podobně, ale vůči svislé ose?

Podobného geometricky pěkného chování se využívá například v počítačové grafice (pravděpodobně je využívá i váš mobil, když si chcete otočit mapu, případně když vás GoogleMaps navigují) a dá se zobecnit do prostoru („Je něco většího než $\mathbb{C}$?“), o čemž se můžete něco pěkného dozvědět tady.

O historii vzniku komplexních čísel (například že vůbec nevznikla kvůli řešení kvadratických rovnic) se pak dozvíte tady - prvních 10 videí je fajn, zbytek je už dost náročný a nemusíte na něj koukat.

Cool fakt: Kdo umí s komplexními čísly, nemusí si pamatovat vzorce pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$, protože podle Moivreovy věty platí
$$(\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y),$$
ale výraz nalevo je po roznásobení závorek rovný
$$(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i \cdot (\cos x \sin y + \cos y \sin x)$$
a protože reálná část nalevo se musí rovna reálné části napravo a stejně tak imaginární části, dostáváme:
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x.$$
Dokážete pomocí dělení komplexních čísel vytvořit vzorce pro $\cos(x-y)$ a $\sin(x-y)$?

A na závěr trochu počítání:

6. **I.**

   (a) Určete absolutní hodnotu komplexního čísla $\frac{2-4i}{1+i} \cdot (3-2i) + (1+2i) \cdot i^7$. $[\sqrt{113}]$

(b) Určete goniometrický tvar komplexního čísla $\frac{2+3i}{5+i}$. [$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$]

(c) V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici $z\overline{z} - 2\overline{z} = \overline{3+3i} - z$. [$2-i; -1-i$]

(d) Určete goniometrický tvar součinu kořenů rovnice $x^2 - 2x + 2 = 0$. [$2\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$]

(e) Vyřešte v $\mathbb{C}$ rovnici $-(ix)^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$. [

$$x_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\sin\frac{5}{18}\pi\right)$$

$$x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[17]{2}\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\sin\frac{17}{18}\pi\right)$$

$$x_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23}{18}\pi + i\sin\frac{23}{18}\pi\right)$$

$$x_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{29}{18}\pi + i\sin\frac{29}{18}\pi\right)$$

$$x_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{35}{18}\pi + i\sin\frac{25}{18}\pi\right)$$

]

Use of complex numbers is a fairly advanced mathematical feature. If you're not aware of a need for them, it's almost certain you can safely ignore them.

dokumentace k Pythonu
`https://python-reference.readthedocs.io/en/latest/docs/complex/`